

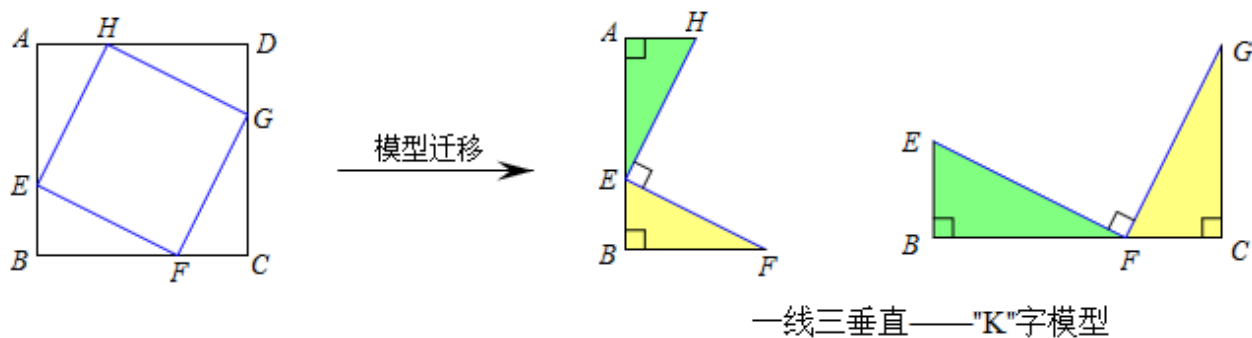
第2讲 正方形中的三垂直与半角模型

一、三垂直模型

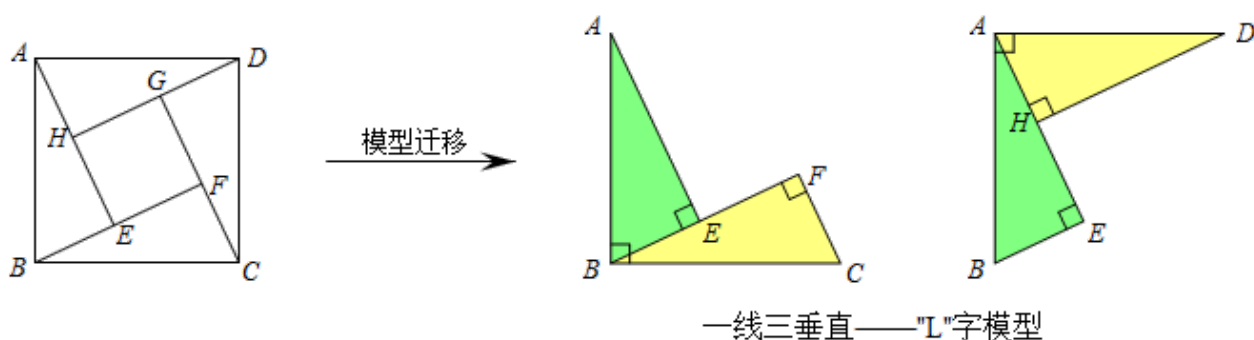
勾股弦图

基本模型及迁移

外弦图：

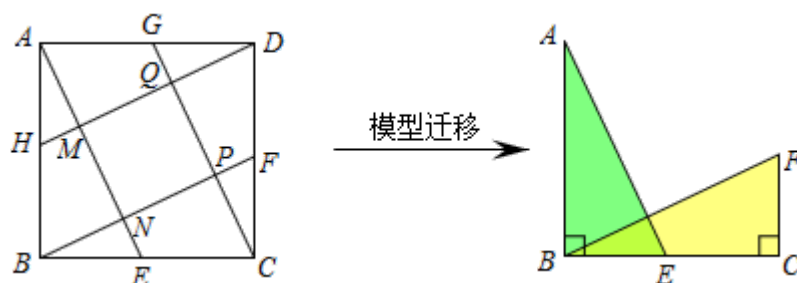


内弦图：



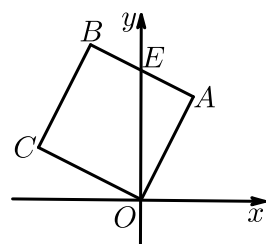
变形

在正方形 $ABCD$ 中， $AH = BE = CF = DG$ 。



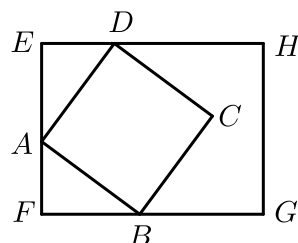
例题1

1. 如图，已知边长为1的正方形 $OABC$ 在直角坐标系中， B, C 两点在第二象限内， OA 与 x 轴的夹角为 60° ，那么 C 点的坐标是 _____， B 点的坐标是 _____。

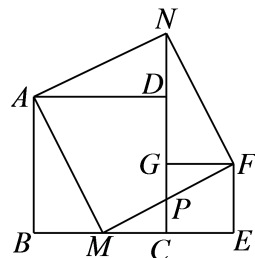


练习1

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的三个顶点 A, B, D 分别在长方形 $EFGH$ 的边 EF, FG, EH 上，且 C 到 HG 的距离是1，到点 H, G 的距离分别为 $\sqrt{5}, \sqrt{10}$ ，则正方形 $ABCD$ 的面积为 _____。

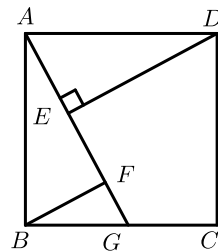


3. 如图放置的两个正方形，大正方形 $ABCD$ 边长为 a ，小正方形 $CEFG$ 边长为 b ($a > b$)， M 是 BC 边上一个动点，联结 AM, MF ， MF 交 CG 于点 P ，将 $\triangle ABM$ 绕点 A 旋转至 $\triangle ADN$ ，将 $\triangle MEF$ 绕点 F 旋转恰好至 $\triangle NGF$ 。给出以下三个结论：① $\angle AND = \angle MPC$ ；② $\triangle ABM \cong \triangle NGF$ ；③ $S_{\text{四边形}AMFN} = a^2 + b^2$ 。
其中正确的结论是 _____（请填写序号）。



|| 例题2

4. 正方形 $ABCD$ 中, 点 G 为 BC 上任意一点, $DE \perp AG$ 于 E , $BF \parallel DE$ 交 AG 于 F .

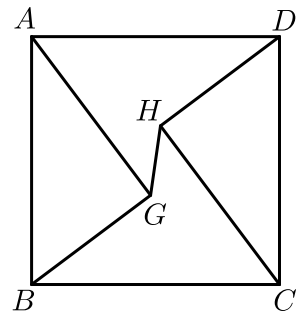


(1) 若点 G 为 BC 的中点, $AB = 4$, $FG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 EF 的长.

(2) 求证: $AF - BF = EF$.

|| 练习2

5. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为10, $AG = CH = 8$, $BG = DH = 6$, 连接 GH , 则线段 GH 的长为 () .



A. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{14}{5}$

D. $10 - 5\sqrt{2}$

6. 某兴趣小组在数学课外活动中，研究三角形和正方形的性质时，做了如下探究：

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 为直线 BC 上一动点（点 D 不与 B ， C 重合），以 AD 为边在 AD 右侧作正方形 $ADEF$ ，连接 CF 。

（1）观察猜想：

如图1，当点 D 在线段 BC 上时，

① BC 与 CF 的位置关系为：_____。

② BC ， CD ， CF 之间的数量关系为：_____（结论直接写在横线上）。

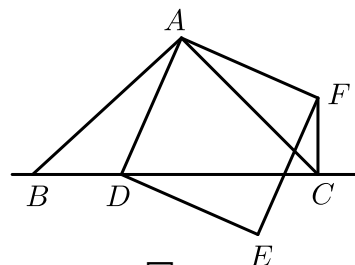


图 1

（2）数学思考：

如图2，当点 D 在线段 CB 的延长线上时，结论①，②是否仍然成立？若成立，请给予证明。

若不成立，请你写出正确结论再给予证明。

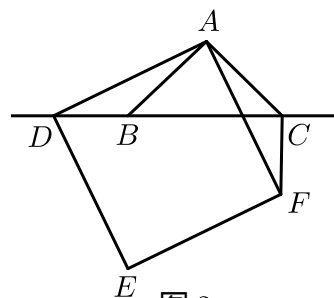


图 2

（3）拓展延伸：

如图3，当点 D 在线段 BC 的延长线上时，延长 BA 交 CF 于点 G ，连接 GE 。若已知

$AB = 2\sqrt{2}$ ， $CD = \frac{1}{4}BC$ ，请求出 GE 的长。

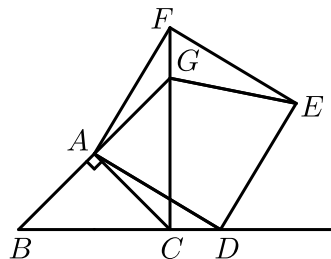
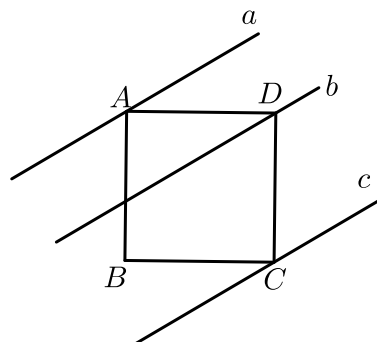


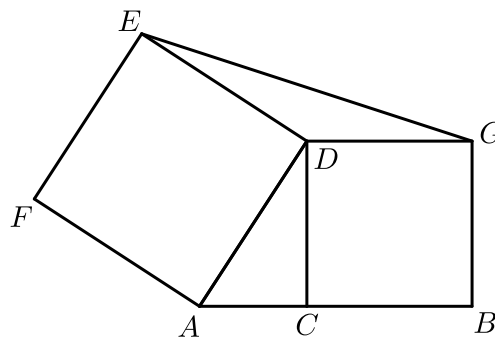
图 3

例题3

7. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，直线 a, b, c 分别通过 A, D, C 三点，且 $a \parallel b \parallel c$ 。若 a 与 b 之间的距离是5， b 与 c 之间的距离是7，则正方形 $ABCD$ 的面积是（ ）。



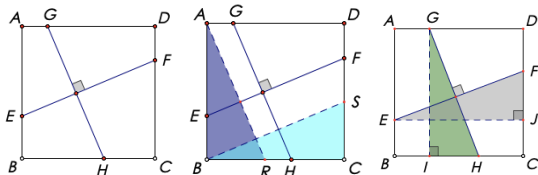
- A. 70 B. 74 C. 144 D. 148
8. 如图， C 为线段 AB 上一点，正方形 $ADEF$ 和正方形 $BCDG$ 的面积分别为 10cm^2 和 5cm^2 ，则 $\triangle EDG$ 的面积为（ ） cm^2 。



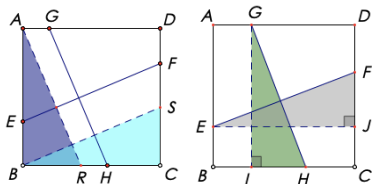
- A. $\frac{5}{2}$ B. 2 C. 3 D. 4

弦图变形拓展——十字模型：有相等能证垂直，有垂直能证相等。（前提：题干中给出图形）

- ①正方形 $ABCD$ 中，若 $EF \perp GH$ ，则可证：_____



- ②正方形 $ABCD$ 中，若 $EF = GH$ ，则可证：_____



例题4

9. 请回答下列各题：

- (1) 如图1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上, AE 、 BF 交于点 O , $\angle AOF = 90^\circ$. 求证: $BE = CF$.

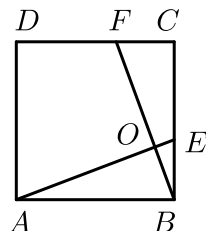


图 1

- (2) 如图2, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 H 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上, EF 、 GH 交于点 O , $\angle FOH = 90^\circ$, $EF = 4$. 求 GH 的长.

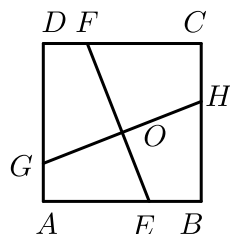


图 2

- (3) 已知点 E 、 H 、 F 、 G 分别在矩形 $ABCD$ 的边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上, EF 、 GH 交于点 O , $\angle FOH = 90^\circ$, $EF = 4$. 直接写出下列两题的答案：

- ① 如图3, 矩形 $ABCD$ 由2个全等的正方形组成, 则 $GH = \underline{\hspace{2cm}}$.

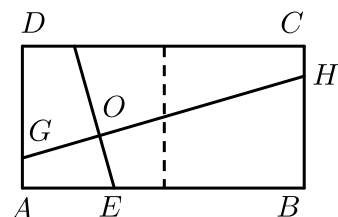


图 3

- ② 如图4, 矩形 $ABCD$ 由 n 个全等的正方形组成, 则 $GH = \underline{\hspace{2cm}}$ (用 n 的代数式表示).

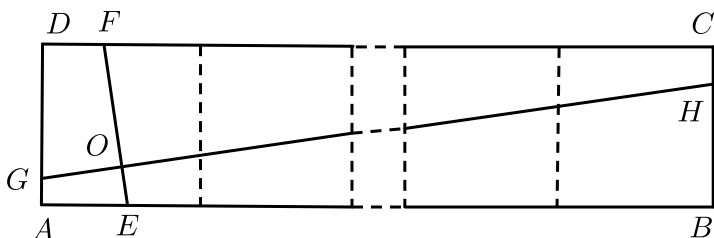
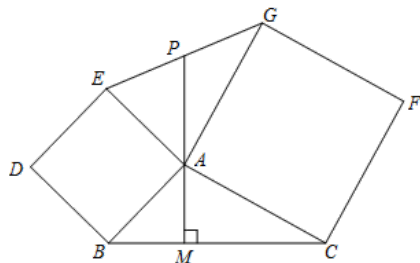


图 4

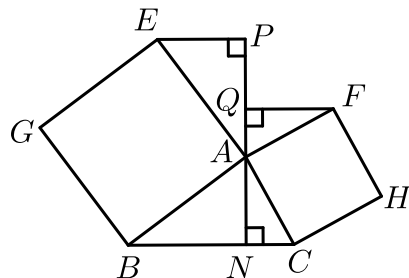
双正方形模型（三垂综合应用）

以 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边向外分别作正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$ ， $AM \perp BC$ ， AM 反向延长线交 EG 于 P ，则点 P 为 EG _____，_____。



练习4

10. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中，分别以 AB 、 AC 为一边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ABGE$ 和 $ACHF$ ，直线 $AN \perp BC$ 于 N ，若 $EP \perp AN$ 于 P ， $FQ \perp AN$ 于 Q 。判断线段 EP 、 FQ 的数量关系，并证明。

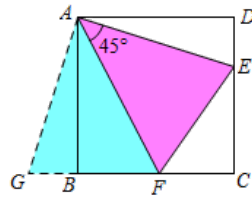
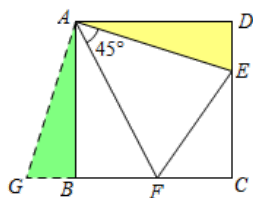
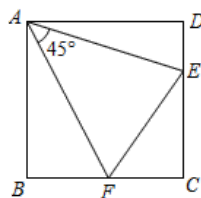


二、角含半角模型

正方形角含半角的和差关系

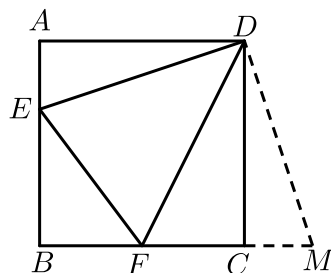
半角在倍角内

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。



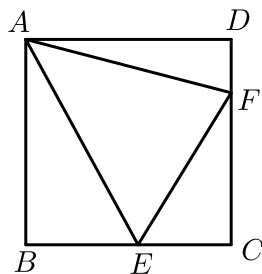
例题5

11. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为3， E, F 分别是 AB, BC 边上的点，且 $\angle EDF = 45^\circ$ 。将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle DCM$ 。若 $AE = 1$ ，则 FM 的长为 _____。



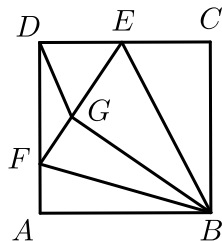
练习5

12. 如图，正方形 $ABCD$ 中，已知 $AB = \sqrt{3}$ ，点 E, F 分别在 BC, CD 上，若 $\angle BAE = 30^\circ$ ， $\angle DAF = 15^\circ$ ，则 $\triangle AEF$ 的面积为 _____。



例题6

13. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1， $\angle EBF = 45^\circ$ ，过点 B 作 $BG \perp EF$ 于 G 。下列说法：①若 $AF = \frac{1}{3}$ ，则 $DG \parallel EB$ ；②若 E 为 CD 的中点，则 $\triangle GDE$ 的面积为 $\frac{1}{15}$ ；③若 $AF = CE$ ，则 $AF = \sqrt{2} - 1$ ；④ $AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1$ 。其中正确的是（ ）。



A. ①②③

B. ①②④

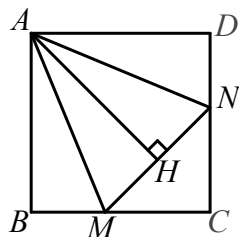
C. ①③④

D. ②③④

练习6

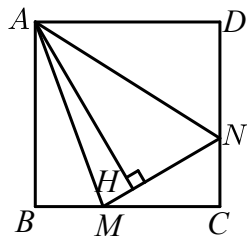
14. 已知，正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 BC 、 DC （或它们的延长线）于点 M 、 N ， $AH \perp MN$ 于点 H 。

(1) 如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系：_____。



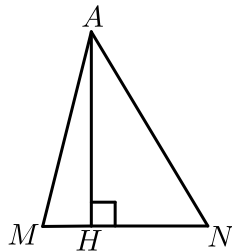
图①

(2) 如图②，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时，(1)中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗？如果不成立请写出理由。如果成立请证明。



图②

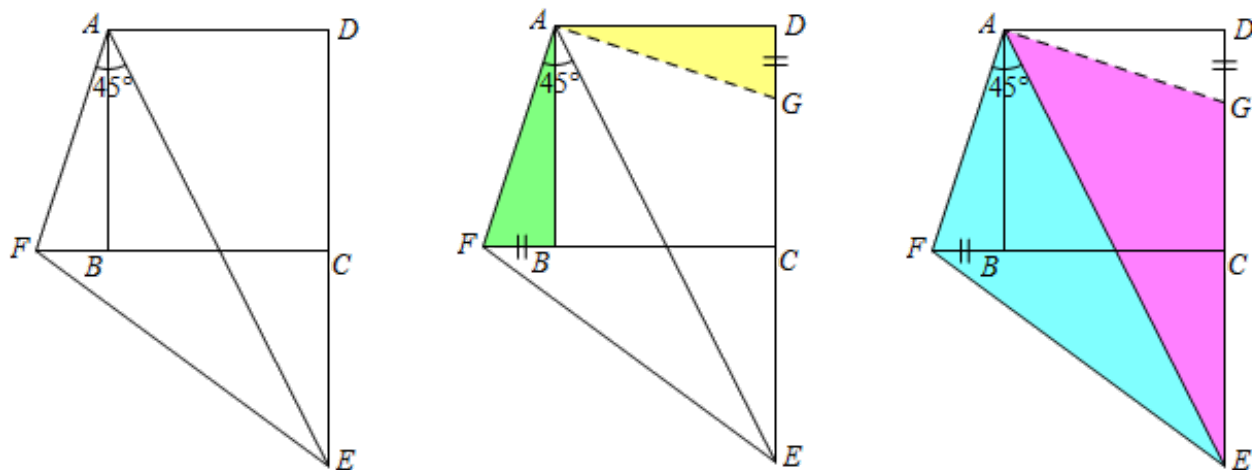
(3) 如图③，已知 $\angle MAN = 45^\circ$ ， $AH \perp MN$ 于点 H ，且 $MH = 2$ ， $NH = 3$ ，求 AH 的长。（可利用(2)得到的结论）。



图③

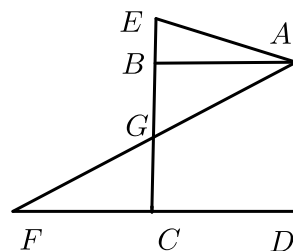
半角在倍角外

如图，正方形 $ABCD$ ， $\angle EOF = 45^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E ，与 CB 的延长线交于点 F



例题7

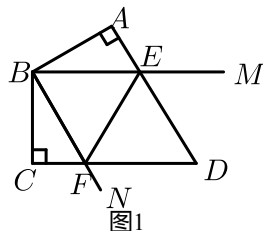
15. 如图，正方形 $ABCD$ 边长 $AB = 3$ ，点 E, F 分别是 CB, DC 延长线上的点，连接 AF 交 CB 于点 G ，若 $BE = 1$ ，连接 AE ，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 AG 长为 _____ .



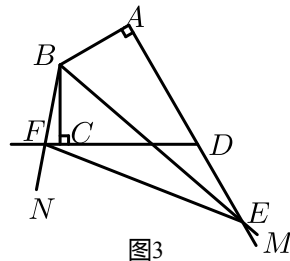
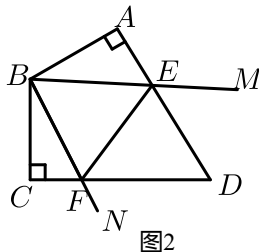
练习7

16. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle MBN$ 绕 B 点旋转, 它的两边分别交 AD , DC (或它们的延长线) 于 E , F .

(1) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时 (如图1), 试猜想 AE , CF , EF 之间存在怎样的数量关系? 请将三条线段分别填入后面横线中: _____ + _____ = _____. (不需证明)

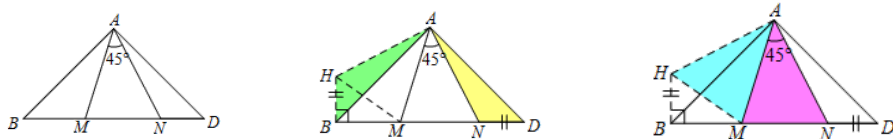


(2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时, 在图2和图3这两种情况下, 上问的结论是否仍然成立? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 那么这三条线段又有怎样的数量关系? 请写出你的猜想, 不需证明.

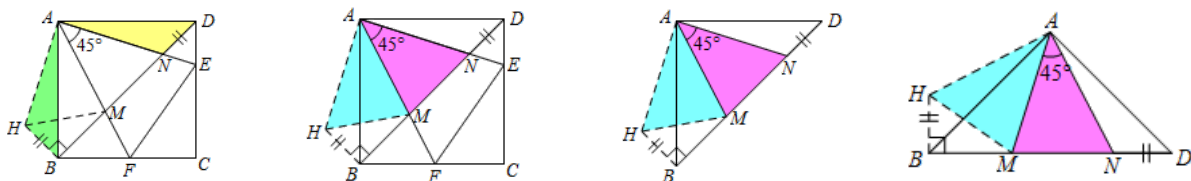


|| 角含半角的平方关系

💡 半角在倍角内：如图，等腰直角 $\triangle ABD$ ， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle MAN = 45^\circ$ 。

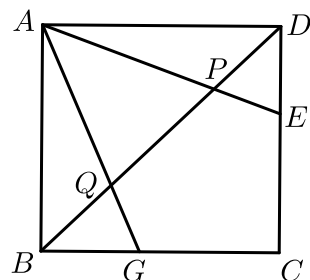


💡 模型的演变



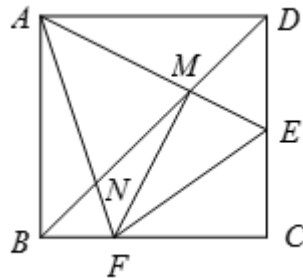
|| 例题8

17. 如图，点 E 、 G 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点，连接 AE 、 AG 分别交对角线 BD 于点 P 、 Q ，若 $\angle EAG = 45^\circ$ ， $BQ = 4$ ， $PD = 3$ ，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____。



|| 练习8

18. 如图，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 为 CD 、 CB 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， BD 交 AE ， AF 于 M 、 N ，连接 MF 、 EF ，下列结论：
- ① $MN^2 = BN^2 + DM^2$ ；② $DE + BF = MF + ME$ ；③ $AM = MF$ 且 $AM \perp MF$ ；④若 E 为 CD 的中点，则 $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$ ，其中正确的有（ ）。

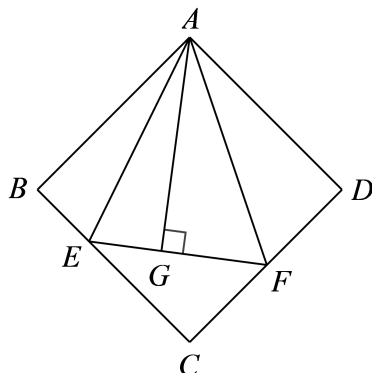


- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

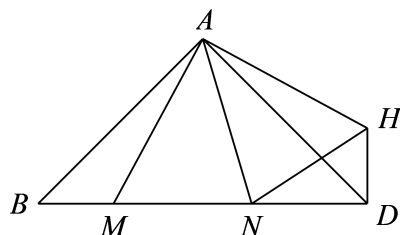
练习9

19. 解答下列问题：

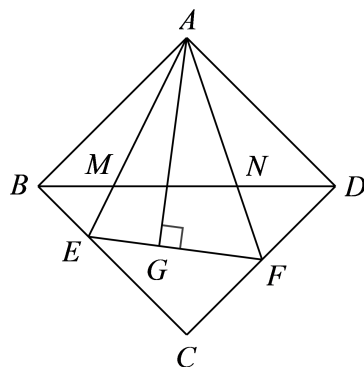
- (1) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\triangle AEF$ 的顶点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上，高 AG 与正方形的边长相等，求 $\angle EAF$ 的度数。



- (2) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，点 M 、 N 是 BD 边上的任意两点，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，将 $\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADH$ 位置，连接 NH ，试判断 MN 、 ND 、 DH 之间的数量关系，并说明理由。

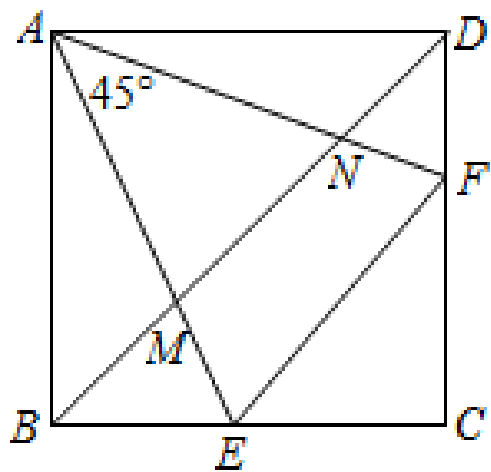


- (3) 如图，在第(1)问的条件下，连接 BD 分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ，若 $EG = 4$ ， $GF = 6$ ， $BM = 3\sqrt{2}$ ，求 AG 、 MN 的长。



正方形内角含半角模型总结

已知正方形 $ABCD$ ， $\angle EAF = 45^\circ$ 。

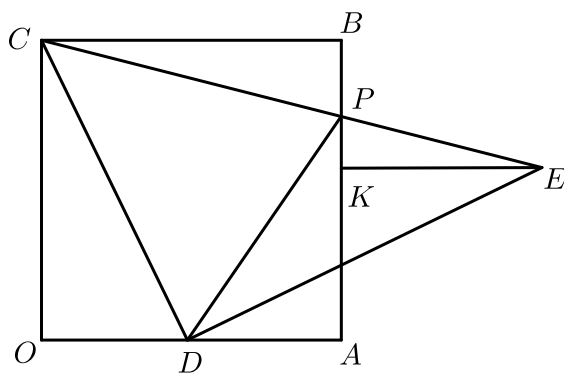


【结论】

- ① _____
- ② _____
- ③ _____
- ④ _____
- ⑤ _____

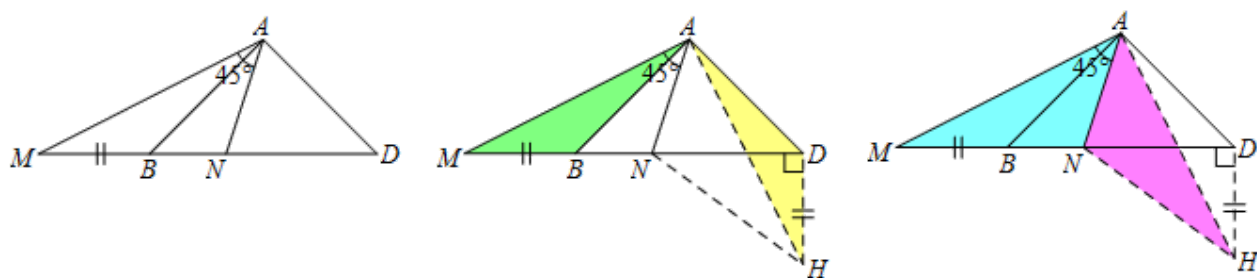
练习10

20. 如图，四边形 $OABC$ 为正方形，在 OA 边上有一点 D ，以 CD 为直角边构造等腰 $Rt\triangle CDE$ ， CE 交 AB 于点 P ，过点 E 作 AB 垂线交 AB 于 K ，若 $BP = 4$ ， $PD = 10$ 且 $OC + EK = 18$ ，试求出 PK 的长度。

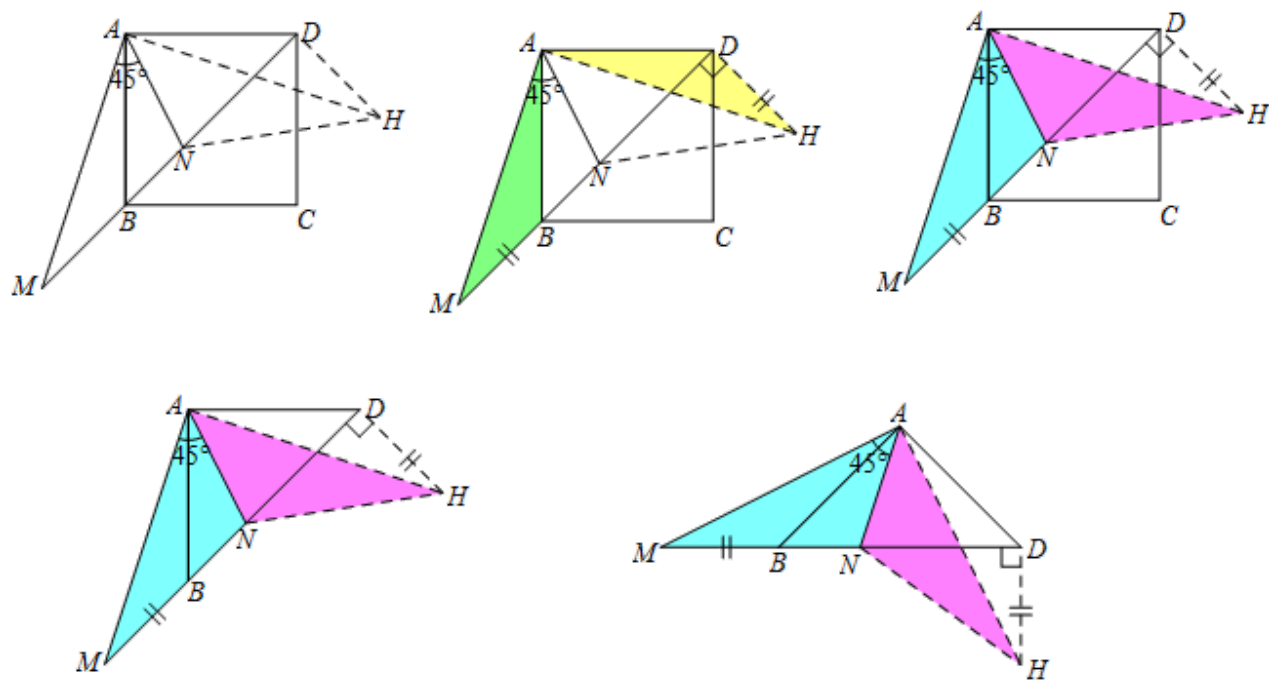


半角在倍角外

如图，等腰直角 $\triangle ABD$ ， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle MAN = 45^\circ$ 。



模型的演变



21. 按要求解答以下问题：

(1) 问题背景：

如图1，在正方形 $ABCD$ 中，点 M ， N 分别在边 BC ， CD 上，连接 MN ，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，将 $\triangle AND$ 绕点 A 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle ABG$ ，可证 $\triangle AMG \cong \triangle AMN$ ，易得线段 MN 、 BM 、 DN 之间的数量关系为 _____（直接填写）。

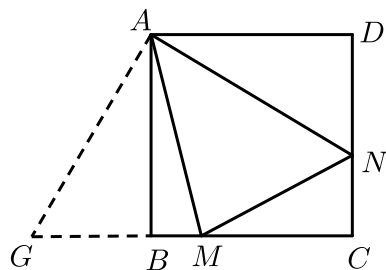


图 1

(2) 实践应用：

在平面直角坐标系中边长为5的正方形 $OABC$ 的两顶点 A 、 C 分别为 y 轴 x 轴的正半轴上， O 在原点，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 按顺时针方向旋转，旋转角为 θ ，当点 A 第一次落在直线 $y = x$ 上时停止旋转，旋转过程中， AB 边交直线 $y = x$ 于点 M ， BC 边交 x 轴于点 N ，如图2，设 $\triangle MBN$ 的周长为 P ，在旋转正方形 $OABC$ 的过程中， P 值是否有变化？请证明你的结论。

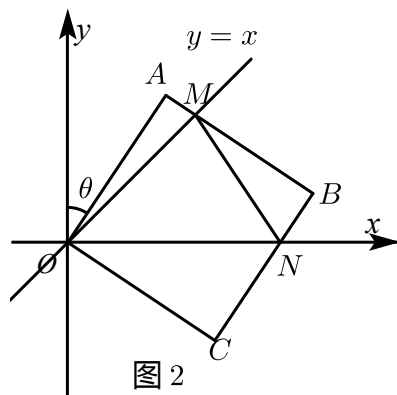


图 2

(3) 拓展研究：

如图3将正方形改为长与宽不相等的矩形，且 $\angle MAN = \angle CMN = 45^\circ$ ，请你直接写出线段 MN 、 BM 、 DN 之间的数量关系。

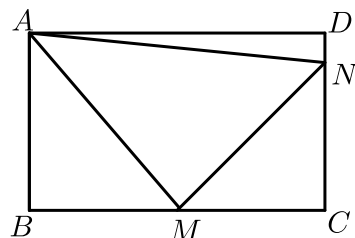


图 3